

№1. – С. 6-13. **2.** *Fridman M.M., Zyczkowski M.* Structural optimization of elastic columns under stress corrosion conditions // *Structural Optimization*. – 2001. – Vol. 21(3). – P. 218-228. **3.** *Симеон Э.А., Назаренко С.А., Зюзин, А.Ю., В.Б. Любецкая В.Б.* Анализ чувствительности для конечноэлементных моделей конструкций // *Вестник НТУ «ХПИ»*. – 2003. – № 8. Т. 3. – С. 77-82. **4.** *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления / М.: Наука, 1978. – 488 с. **5.** *Жовдак В.А., Иглин С.П., Смирнова Л.М., Солошенко В.А.* Оптимизация лопатки рабочего колеса турбокомпрессора по критерию собственной частоты колебаний // *Вестник НТУ «ХПИ»*. – 2003. – №. 12. Т. 1. – С. 71-78. **6.** *Назаренко С.А.* Разработка метода анализа чувствительности и оптимизации оболочечных элементов конструкций и лопаток турбомашин / Дис. канд.техн.наук. – Харьков, 1989. – 210 с.

Поступила в редакцию 05.06.04

УДК 681.3

И.Г.СУВОРОВА, докт.техн.наук, ИПМаш НАН Украины

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Розглянуті теоретичні основи залучення методу R-функцій до розв'язку осесиметричних течій рідини у каналах складного профілю. Розроблені комп'ютерні моделі таких течій, наведені приклади течій у реальних каналах.

The paper considers theoretical principles of the R-functions method application to axisymmetric fluid in the channel of complicate form. The computer-based models of such fluid are created. Also the efficiency of one based on computation of the real channel are showed.

Введение

Над формулировкой основных уравнений движения вязкой жидкости, представляющих математическую модель законов сохранения импульса и массы, работали Л.Навье, С.Пуассон, Б.Сен-Венан и Дж.Г.Стокс. При этом был использован обобщенный закон трения Ньютона, предполагающий, что для движущихся жидкостей и газов напряжения пропорциональны скоростям деформаций, а также соображения о действии межмолекулярных сил [1,2].

Основные краевые задачи для стационарных уравнений Навье-Стокса связаны с исследованием течений в замкнутых полостях, каналах, течений со свободными поверхностями, в струях и следах за телами, с обтеканием тел. При этом интегрирование уравнений Навье-Стокса проводится в областях (конечных или бесконечных), на границе которых ставятся условия из соображений физического характера (условия прилипания или скольжения по поверхности тел, вдува или отсоса на проницаемых поверхностях, условия внешнего потока вдали от обтекаемого тела, условия на свободной границе и др.). Для нестационарных задач помимо граничных условий должны задаваться начальные условия [1–3].

Для нахождения решений таких задач на помощь исследователям пришли

приближенные методы. Для решения некоторых классов задач динамики вязких жидкостей и газов разработаны алгоритмы, основанные на использовании различных методов. Например, для задачи расчета ламинарных течений вязких несжимаемых жидкостей, стационарных задач о ламинарных двумерных течениях в суживающемся и расширяющемся каналах, в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, нестационарной задачи обтекания в канале плоской пластины, расположенной перпендикулярно к направлению потока с использованием метода установления, применением явных и неявных схем, схем типа "крест", Дюфорта-Франкеля и итерационных методов [4, 5].

Вариационно-сеточные методы, и в частности метод конечных элементов, также нашли свое применение для решения уравнений динамики вязкой жидкости. Так исследовались задачи обтекания эллиптического и кругового цилиндра (в том числе вращающегося), пластины конечной толщины под углом атаки, капли, плоской ступени и т.д.

Метод R-функций (RFM) – применялся для расчета ламинарного течения в каналах сложного поперечного сечения (в том числе в решетках тепловыделяющих элементов круглой, крестообразной, прямоугольной форм с плотной и раздвинутой упаковкой), в прямоугольной выемке с движущейся крышкой, в каналах с наличием препятствий, установившегося движения ньютоновской вязкопластической жидкости по цилиндрической трубе сложного сечения и др.[6, 7].

1. Теоретическая модель

Одним из наиболее распространенных видов пространственных течений является движение, симметричное относительно некоторой оси, называемое осесимметричным. Сюда относятся движения в соплах круглого сечения, в конфузорах и диффузорах, осевое обтекание тел вращения, дирижабельных и других форм. В пространственных движениях нельзя ввести функцию тока в общем случае, как это было сделано при изучении плоских движений. Функция тока существует только в отдельных частных случаях, одним из которых является осесимметричное движение.

Когда движение симметрично относительно оси x , вихревые линии должны быть окружностями, центры которых лежат на этой оси и плоскости которых перпендикулярны ей. Такие движения удобно рассматривать с помощью функции тока Стокса, существование которой не зависит от того, является ли движение безвихревым или нет.

1.2. Уравнение для функции тока в осесимметричном случае при наличии вязкости

Уравнение Навье-Стокса и уравнение неразрывности для осесимметричного течения в цилиндрических координатах (r, θ, z) могут быть представлены в форме [1,2]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \quad \leftarrow \frac{\partial}{\partial r} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) \leftarrow \frac{\partial}{\partial z} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r v_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Дифференцируя первое из уравнений по r , а второе – по z и вычитая из первого второе, исключаем члены с давлением и, используя третье уравнение, а также соотношение для проекции вихря в осесимметричном случае

$$\zeta = \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}, \quad (4)$$

приходим к:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right). \quad (5)$$

Эта форма представления уравнений Навье-Стокса обычно называется “уравнением переноса завихренности”. Используя характерный радиальный размер R и характерную скорость U_0 , уравнение (5) запишем в безразмерном виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + v_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \zeta}{\partial z} - \frac{v_r \zeta}{r} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{\zeta}{r^2} \right), \quad (6)$$

где $Re = U_0 R / \nu$ – число Рейнольдса.

Введя функцию тока

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad (7)$$

и для упрощения выкладок предположив, что движение установившееся, получим уравнение, выражающее завихренность через производные функции тока:

$$\xi = -\frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right). \quad (8)$$

После подстановки выражения для завихренности (8) в уравнение (6) переноса завихренности, получим единственное уравнение для определения функции тока. Оно называется бигармоническим уравнением и может быть записано в форме:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right\} - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При применении формулировки $\xi - \psi$ сходимость приближенного реше-

ния достигается быстрее, чем для примитивной формулировки, включающей рассмотрение давления.

После построения решения для функции тока давление может быть определено из уравнения Пуассона [5], правая часть которого выражается через производные функции тока:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2}{r^2} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial r} \right) \right] \quad (10)$$

1.3. Граничные условия

Рассмотрим граничные условия для функции тока на примере осесимметричного течения в канале сложного профиля (рис. 1).

Граничные условия формулируются как условие прилипания частиц жидкости к твердой стенке. Это означает отсутствие как нормальной к твердой поверхности относительной скорости между частицами жидкости и близлежащими точками поверхности ($v_n = 0$), так и касательных составляющих относительной скорости ($v_\tau = 0$), т.е. отсутствие скорости скольжения жидкости по поверхности. На входе в канал известно $v_r = v_1(r)$; $v_r = 0$, а на выходе имеем в общем случае $\int_0^c v_1(r) r dr = \int_0^b v_2(r) r dr$, что следует из равенства расхода жидкости через входное и выходное сечения канала.

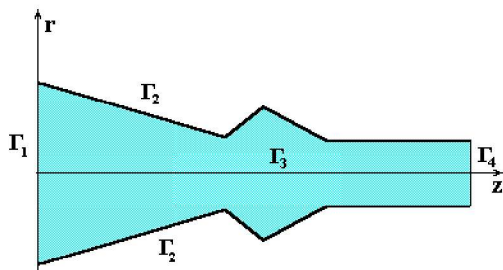


Рисунок 1

На входе Γ_1

$$\psi|_{\Gamma_1} = \frac{Ar^4}{4} + \frac{Br^2}{2}, \quad (11)$$

где A, B – постоянные, значения которых зависят от желаемого типа профиля втекающего потока (параболический или однородный) и от радиуса трубы [4]. Параболический профиль предпочтительней. Выражение (11) получено из интегрирования уравнения связывающего $v_z = 0$ с функцией тока ψ

Твердая граница

$$\psi|_{\Gamma_2} = const. \quad (12)$$

На твердой границе и радиальная, и осевая составляющие скорости равны нулю вследствие принятия условия отсутствия скольжения, характерного для вязкой жидкости.

$$v_r|_{\Gamma_2} = v_z|_{\Gamma_2} = 0.$$

Осевая линия Γ_3 . Из этого следует предположение нулевой завихренности и нулевой радиальной скорости на осевой линии. Значение функции тока на осевой линии произвольно; поэтому можно предположить, что

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0. \quad (13)$$

Граница вниз по потоку, ψ находится по линейной экстраполяции в осевом направлении либо из равенства расхода жидкости. В случае численной реализации методом R-функций можно это условие не задавать, а принять его как естественное.

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (14)$$

на всей границе области.

Граничные условия для давления:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{Re} \frac{\zeta}{r}. \quad (16)$$

В качестве начальных условий выбираются решения, сошедшиеся при другом меньшем числе Рейнольдса [4].

2. Применение RFM для решения гидродинамических задач

Искомые функции тока и вихря зависят от числа Рейнольдса (Re), характеризующего отношение сил инерции к силам вязкости и определяющего интенсивность вынужденной конвекции. При решении уравнения (9) возникают трудности, связанные с наличием малого параметра при старшей производной ($1/Re$) и нелинейностью исходного оператора задачи. Наличие малого параметра при старшей производной приводит к большим кривизнам (резкому перепаду градиентов) решения, что соответствует появлению у стенок областей при больших Re пограничного слоя, толщина которого пропорциональна $1/\sqrt{Re}$. Нелинейность оператора, типичная для систем гидродинамического типа, обусловлена в случае несжимаемой жидкости инерционными составляющими в уравнениях количества движения. Все это приводит при $Re \gg 1$ к образованию весьма сложных течений и в ряде случаев явление вычислительной неустойчивости трудно отличить от возможного сложного поведения решения. В большинстве случаев для каждого типа течения в некотором диапазоне чисел Re существует единственное устойчивое стационарное решение уравнения Навье-Стокса, для получения которого можно использовать либо

стационарные уравнения, либо нестационарные при $t \rightarrow \infty$ (метод установления). При увеличении числа Re стационарное решение перестает быть единственным и начинает зависеть от начальных данных.

И тем не менее метод R-функций (RFM) позволяет решать такой класс задач. Решение уравнения (9) представим в виде $\psi = \psi_1 + \psi_0$, где,

$$\psi_0 = \frac{\sum_{i=1}^N \frac{\psi_i}{w_i^2}}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{w_i^2}},$$

w_i – линии на границе области, которые заданы при помощи R-функций. ψ_0 и ψ_1 соответственно однородная и неоднородная части структуры. ψ_0 обеспечивает продолжение граничных условий внутрь области и получено с помощью формулы «склейки» [6]. $\psi_1 = \sum_{i=1}^N C_i \phi_i$, где C_i – кон-

станты, которые необходимо определить, а ϕ – полная последовательность координатных функций. Уравнение (9) переписывается в терминах ψ_1 и ψ_0 .

$$\begin{aligned} & \frac{1}{Re} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial z^4} + \right. \\ & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \Big) - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} + \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} - \\ & - \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} - \\ & - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^2 \partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^3} \right) + \\ & + \frac{2}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} \right) + \frac{3}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} \right) - \\ & - \frac{3}{r^4} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial z^3} \right) + \\ & + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial r^2 \partial z} \right) - \frac{1}{r^3} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r \partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z} \right) = \\ & = -\frac{1}{Re} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial r^4} - \frac{2}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^2 \partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial^4 \psi_0}{\partial z^4} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \Bigg) + \\
& + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^2 \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^3} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial z^2} - \frac{3}{r^3} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial r^2} + \\
& + \frac{3}{r^4} \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial z^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi_0}{\partial r} \frac{\partial^3 \psi_0}{\partial r^2 \partial z} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial z}
\end{aligned}$$

В качестве начального приближения использовалось как $\psi_0 = 0$ ($C_i = 0$; $i = 0, \dots, N$) так и $\psi_0 = \omega^2$ ($C_0 = 1$; $C_i = 0$; $i = 1, \dots, N$). Кроме того оказалось, что с ростом числа Re наиболее эффективным является использование в качестве начального приближения значение функции тока, полученного при другом, меньшем значении числа Re .

3. Компьютерная реализация

Поставленные задачи решаются методом R-функций в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ, разработанной в отделе прикладной математики и вычислительных методов Института проблем машиностроения НАН Украины [6, 8].

На рис. 2 представлен разрез реального канала, по которому движется вязкая несжимаемая жидкость [9].

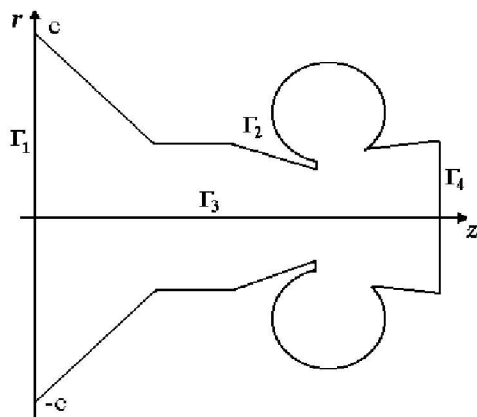


Рисунок 2

Математическая формулировка задачи сводится к решению уравнения (17) со следующими краевыми условиями:

$$\psi|_{\Gamma_1} = -\frac{r^4}{2c^2} + \frac{r^2}{2},$$

где Γ_1 – вход в канал,

$$\psi|_{\Gamma_2} = -\frac{y^4}{2c^2} + \frac{y^2}{2},$$

где Γ_2 – твердая граница, которая описана R-функциями,

$$\psi|_{\Gamma_3} = 0,$$

где Γ_3 – ось симметрии, Γ_4 – выход из канала. Здесь условие не задаем, считаем его естественным.

На рис. 3 представлена картина линий уровня функций тока ψ при $Re = 1$.

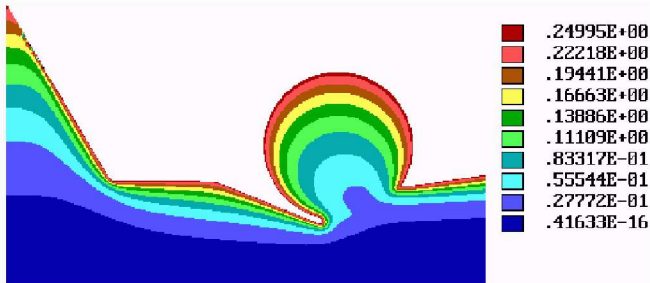


Рисунок 3

Заключение

Компьютерная модель течения вязкой несжимаемой жидкости, построенная методом R-функций (RFM), позволила в рамках системы ПОЛЕ провести численные исследования в реальных каналах со сложным профилем, получить качественные картины течений, что дает возможность судить о влиянии чисел Рейнольдса (Re) и ширины каналов на гидродинамические характеристики.

Поскольку функция тока ψ (решение) имеет аналитический вид, то легко найти профили скоростей, распределение давлений и установить длину гидродинамической стабилизации.

Список литературы: 1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М., Наука, 1970. 2. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика (ч.1, ч.2). – М., ОГИЗ, 1948. 3. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М., Мир, 1967. 4. Численные методы в динамике жидкостей (материалы кармановских чтений) // Под ред. О.М.Белоцерковского и В.П.Шидловского. – М., Мир, 1981. 5. Oberkampf W.L. Domain Mappings for the Numerical Solution of Partial Differential Equations, Int. J. Numer Methods Eng., 10: 211-223, 1976. 6. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К.: Наук. думка, 1982. – 552 с. 7. Рвачев В.Л., Суворова И.Г., Шейко Т.И. Численная реализация задачи о тчении вязкой жидкости методом R-функций в системе ПОЛЕ-3. // Мат. методы и физ.-мех. поля, 1991. – 33. – С.95-99. 8. Суворова И.Г., Шевченко А.Н. Автоматизация расчетов методом R-функций применительно к задачам стройиндустрии: Учеб.пособие. – Киев: Учеб.-метод. каб. высш. образования, 1991. – 60 с. 9. Патент №2083247 на изобретение "Устройство для распыления жидкости" авторы Глотов Е.А., Суворова И.Г. (РОСПАТЕНТ).

Поступила в редколлегию 18.11.03